**DİFERANSİYEL DENKLEMLER**

Sizlerin de bildiği üzere içinde bilinmeyenlerin (x, y, z vs.) olduğu yapılara denklem (eşitlik) diyoruz. Örneğin:

Eğer bir denklemde bir fonksiyonun ya da fonksiyonların en az bir adet türevli ifadesi varsa bu tür denklemlere diferansiyel denklem diyoruz. Örneğin:

Yukarıda verilen örneklerden de anlaşılacağı üzere bir diferansiyel denklemin bir yanının 0 olması şart değildir. ile denkleminin ikisi de doğrudur. Ayrıca bir diferansiyel denklem mutlaka en az bir adet türevli ifade içermelidir. Yani, şeklindeki bir denklem diferansiyel denklem değildir. Bir diferansiyel denklem olabilmesi için şu şekilde olmalıdır:

Bir denklem üzerindeki en büyük amacımız içinde bulundurduğu bilinmeyen ifadeleri bulmaktır. Mesela şeklinde olan bir denklemde amaç ’i bulmaktır ki bu denklem için x değeri ‘ye eşittir. Diferansiyel denklemlerde bu bulunmak istenen şey değeridir. Yani türevi alınan fonksiyonu bulmaktır. Mesela şeklinde olan bir diferansiyel denklemdeki amaç ’i bulmak değil y değerini bulmaktır.

**Örnek:**

fonksiyonunun denkleminin çözümü olup olmadığını gösteriniz.

**Cevap:**

Verilen fonksiyon ve denklemde bağımlı ve bağımsız değişken olduğuna dikkat edilmesi gerekir. denklemi için ilk önce ’in türevlerini bulmamız gerekir.

Bulduğumuz değerleri denklemine koyduğumuzda denklem sağlandığı için verilen fonksiyon denklemin bir çözümüdür.

**Örnek:**

fonksiyonunun denkleminin çözümü olup olmadığını gösteriniz.

**Cevap:**

Verilen denklemi için ilk önce ’in türevlerini bulmamız gerekir.

Bulduğumuz değerleri denklemine koyduğumuzda denklem sağlandığı için verilen fonksiyon denklemin bir çözümüdür.

**Diferansiyel Denklemleri Sınıflandırma**

Diferansiyel denklemleri 3 farklı şekilde sınıflandırabiliriz. Bu sınıflandırmalar şu şekildedir:

* İçerdikleri Türev Çeşidine Göre Diferansiyel Denklemler
* Mertebesine Göre Diferansiyel Denklemler
* Derecesine Göre Diferansiyel Denklemler

Diferansiyel denklemleri içerdikleri türev çeşidine göre 2 başlık altında inceleyebiliriz:

**İçerdikleri Türev Çeşidine Göre Sınıflandırma**

**Adi (Normal) Diferansiyel Denklem** **Kısmi Diferansiyel Denklem**

Eğer bu denklemler tek değişkenli fonksiyonların türevleri ile oluşturulmuş ise Adi (Normal) Diferansiyel Denklem olarak adlandırılırlar. İlaveten bu not sadece bu çeşit denklemlerin çözümleri ile ilgili olacaktır. Bu tür denklemleri kapalı fonksiyon olarak şöyle ifade edebiliriz:

Eğer bu denklemler çok değişkenli fonksiyonların türevleri (Kısmi Türev) ile oluşturulmuş ise Kısmi Diferansiyel Denklem olarak adlandırılırlar. Bu tür denklemleri ve ’yi bağımsız ’yi ise bağımlı değişken olacak şekilde kapalı fonksiyon olarak şöyle ifade edebiliriz:

Birden fazla bağımlı değişken varsa ne olur?

Hem Kısmi hem normal türev içerirse ne olur?

Eğer x ve y bağımsız olmak üzere f(x) ve g(y) içeriyorsa ne olur?

Neden bu şekilde sınıflandırıyoruz?

**Mertebesine Göre Sınıflandırma:** Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeye sahip türevin mertebesi aynı zamanda o denklemin mertebesi olur. Örneğin:

→ *1.Mertebeden*

→ *2.Mertebeden*

→ *3.Mertebeden*

→ *2.Mertebeden*

**Derecesine Göre Sınıflandırma:** Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken (y vs.) ve onun türevlerinin üs kuvveti tam sayı olacak şekilde düzenlendikten sonra en yüksek mertebeye sahip türevin üssü o denklemin derecesi olur. Eğer birden fazla en yüksek mertebeye sahip türevli var ve bunların üsleri farklı ise içlerinden en büyük olan seçilir. Örneğin:

→ *3.Dereceden*

→ *1.Dereceden*

→ *2.Dereceden*

→ *2.Dereceden*

Yukarıda verdiğimiz tanımda “bağımlı değişken (y vs.) ve onun türevlerinin üs kuvveti tam sayı olacak şekilde düzenlendikten sonra” şeklindeki kısım dikkatinizi çekmiştir. Peki bu tam olarak ne demek? Farz edelim ki bize şeklinde bir diferansiyel denklem verildi. Görüleceği üzere denklemdeki en yüksek mertebeye sahip ifade ‘dür. Bunun üssü ise 'dir. Peki bu denklemin derecesi midir? Tabii ki hayır! Bu tür denklemlerde tanımda dediğimiz şekilde bir düzenleme gerekir. Peki nasıl yapacağız bunu? Şu şekilde:

Ya daha büyük üs ile genişletseydim ne olacaktı?

Görüldüğü üzere türevli ifadenin üssünü bir tam sayı haline getirdik. Bu yeni bulduğumuz denkleme bakarak bu denklemin 1. Dereceden Diferansiyel Denklem olduğunu söyleyebiliriz.

Bir denklemin derecesine bakarken dikkat etmekte fayda var. Örneğin denkleminin derecesi 3 gibi gözüküyor fakat değil. Denklemdeki çarpanını diğer çarpan üzerine dağıtırsak ifade şöyle olur: Görüldüğü üzere aslında denklemin gerçek derecesi 4 olarak çıkar.

**Örnek:**

şeklinde olan bir diferansiyel denklemin derecesini bulunuz.

**Cevap:**

Yukarıda elde ettiğimiz denklemdeki kısmından en yüksek üsse sahip ifadesinin olduğu aşikârdır. Bundan dolayı da bu denklemin derecesi 6’ya eşit olur.

Bu tür denklemler daha da çoğaltılabilir. Bu çeşitteki denklemleri burada gösterildiği gibi veyahut daha farklı şekillerde de çözebilirsiniz. Fakat bazı denklemleri bu şekilde çözmek imkânsızdır. Öyleyse nedir bu bazı denklemler? Bağımlı değişken veya ona ait türevli ifadelerden biri ya da birkaçı trigonometrik, üssel, logaritmik vs. gibi fonksiyonlarla birlikte olursa bu denklemlerde derece kavramından bahsedemeyiz. Aşağıdaki denklemlerin hiçbirinde derece yoktur:

veya

**Özel Diferansiyel Denklemler**

Diferansiyel denklemlerdeki sınıflandırmalardan bahsetmişken bir de bizim özel diferansiyel denklemlerimiz var. Bunları şu şekilde sıralayabiliriz:

* Lineer (Doğrusal) Diferansiyel Denklemler
* Homojen Diferansiyel Denklemler
* Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemler

Neden bu çeşit denklemler var? Ne işimize yarıyor?

**Lineer (Doğrusal) Diferansiyel Denklemler:** Bir diferansiyel denklemin lineer olması için 3 adet şart vardır: Lineer Denklem ne demek? Tam olarak ne anlama geliyor?

1. Bağımlı değişken ve ona ait türevli ifadelerin üsleri 1 olacak.
2. Bağımlı değişken ve ona ait türevli ifadeler asla çarpım halinde olmayacak. (, vs.)
3. Bağımlı değişken ve ona ait türevli ifadeler trigonometrik, üssel, logaritmik vs. gibi fonksiyonlarla birlikte olmayacak. (, vs.)

Bu türdeki denklemleri genel olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

Örnek olarak şu denklemleri verebiliriz:

Aşağıdakiler ise bu tanıma uymazlar:

🡪 *1.Kural İhlali*

🡪 *2.Kural İhlali*

🡪 *3.Kural İhlali*

🡪 *1. ve 2. Kuralın İhlali*

Eğer şeklinde bir denklem verilirse hemen 2.kural ihlali olduğu söylenmemelidir. Dikkatli bir şekilde ilk çarpanı ikinci çarpan üzerinde dağıtırsak denklem şöyle bir hal alır: Böylece denklemin aslında bir lineer diferansiyel denklem olduğu ortaya çıkar.

**Homojen Diferansiyel Denklemler:** Bir diferansiyel denklemin lineer olması için 3 adet şart vardır

**Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemler:** Bir diferansiyel denklemin lineer olması için 3 adet şart v

Homojen ve Değişken Katsayılı olması ne demek? Ne anlama geliyor?

1. **Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler:**

Bu yöntem 1.mertebe 1.derece denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılıyor. Bu yöntemi kullanabilmek için ilk önce verilen denklemi değişkenlerine ayırmamız gerekir. Dahası, bunu yapabildiğimiz denklemlere **değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem** deriz. Peki bir denklemin değişkenlerine ayrılabilir olması ne demektir? Eğer bir denklemi aşağıdaki biçimde yazabiliyorsak o denklem değişkenlerine ayrılabilir demektir.

Ayrıca verilen denklemi, yukarıdaki biçimde olacak şekilde düzenlenmesine ise **değişkenlerine ayırma** denir. Aşağıdaki denklemler bu tür denklemlere örnek olarak verilebilir:

Bu tür denklemlerde diferansiyellerin (dy, dx) paydada olamayacağı unutulmamalıdır! Bazen verilen diferansiyel denklemin değişkenlerine ayrılabilir olup olmadığı direkt olarak görülemez. Bu tür durumlarda birkaç işlem yapmak gerekir.

**Örnek:**

şeklinde olan diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilir midir?

**Cevap:**

yerine yazılır.

Görüldüğü üzere denklem istediğimiz yapıya geldi. Bundan dolayı bu denklem değişkenlerine ayrılabilir bir denklemdir.

Eğer bir denklemin değişkenlerine ayrılabilir olduğuna kanaat getirdiysek artık geriye sadece her iki tarafın da integralini almak kalır. İntegral sonucu bizim çözümümüz olacaktır.

**Örnek:**

şeklinde olan diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

**Cevap:**

Zaten yukarıda bu denklemin değişkenlerine ayırmıştık.

Çözüm kapalı fonksiyon olarak yukarıdaki gibidir. İstenirse aşağıdaki gibi değeri yalnız bırakılarak da çözüm ifade edilebilir.

**Örnek:**

şeklinde olan diferansiyel denkleminin başlangıç değeri için çözümünü bulunuz.

**Cevap:**